Traitement des signaux déterministes - Théorie des fonctions généralisées

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Delta de Dirac

Par la fonction de Heaviside

La dérivée d'une fonction qui passe de 0 à 1 avec une pente est une fonction porte de hauteur croissante et de support décroissant.

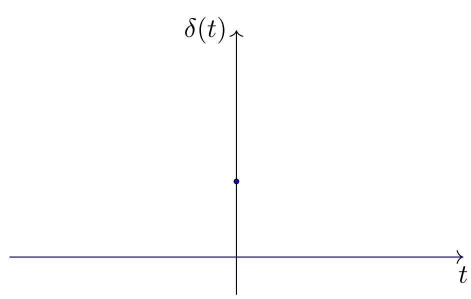
$$\boxed{\delta(t) = \lim_{h \to 0} q_h(t)}$$

Définition et intégrale

$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} \qquad \boxed{\int_a^b \delta(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si } a < 0 < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^0 \delta(t)\ \mathrm{d}t = 1?\ 0?}$$

Représentation graphique



Théorie de la distribution

Espace fonctionnel

Espace fonctionnel $\mathbb{F}$: Espace vectoriel de fonctions

Support d'une fonction

$\text{Supp}(f) =$ Ensemble des points où $f \neq 0$

Fonctionnelle

Une fonctionnelle T sur un espace réel F associe à chaque fonction ϕ de F un nombre réel $\langle T, \phi \rangle$.

Exemple : $\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,\mathrm{d}t$ *où F est l'espace des fonctions sommables.*

Espace $\mathcal{D}$: espace des fonctions test

$\mathcal{D} = \{$fonctions ϕ telles que ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\text{Supp}(\phi)$ est un compact$\}$

Stabilité par produit

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \forall \psi\ \mathcal{C}^\infty, \phi.\psi \in \mathcal{D}$$

Convergence

Une suite $\phi_k \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ cv vers $\phi \in \mathcal{D}$ si $\begin{cases} \phi_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \phi \\ \forall n \in \mathbb{N}, \phi_k^{(n)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \phi^{(n)} \\ \text{Il existe un compact } \Omega \text{ tel que } \begin{cases} \text{Supp}(\phi_\infty) \subset \Omega \\ \forall k \in \mathbb{N}, \text{Supp}(\phi_k) \subset \Omega \end{cases} \end{cases}$

Continuité et linéarité

Une fonctionnelle T est continue si pour toute suite ϕ_k qui cv vers ϕ, $\langle T, \phi_k \rangle \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \langle T, \phi \rangle$

Distribution

Une distribution T est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} \forall \phi \in \mathcal{D}, \langle T, \phi \rangle \in \mathbb{C} \\ \langle T, \alpha\phi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle T, \phi \rangle + \beta \langle T, \psi \rangle \\ \forall \phi_k \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}, \phi_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \phi \in \mathcal{D} \implies \langle T, \phi_k \rangle \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \langle T, \phi \rangle \end{cases}$$

En pratique on montre la linéarité puis continue en 0 car $\begin{cases} f \text{ linéaire} \\ f \text{ continue en } 0 \end{cases} \implies f$ continue

L'espace des distributions est noté $\mathcal{D}'$

Distributions régulières

$$\boxed{\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t \text{ où } f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ localement sommable}}$$

Support d'une distribution

$$\boxed{\mathrm{Supp}(T) = \text{Plus petit fermé } K \text{ tel que } \forall \phi \in \mathcal{D}, \langle T, \phi \rangle = 0 \text{ si } \mathrm{Supp}(\phi) \cap K = \emptyset}$$

Linéarité

$$\boxed{\langle \lambda T_1 + \mu T_2, \phi \rangle = \lambda \langle T_1, \phi \rangle + \mu \langle T_2, \phi \rangle}$$

Unicité

$$\boxed{\langle T_1, \phi \rangle = \langle T_2, \phi \rangle \implies T_1 = T_2}$$

Translation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tau_a f(x) = f(x - a)$$

$$\boxed{\langle \tau_a T, \phi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \phi \rangle}$$

Dilatation

$$\forall x \in \mathbb{R}, d_a f(x) = f(ax)$$

$$\boxed{\langle d_a T, \phi \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle T, \phi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle}$$

Fonction paire

Si f est paire alors $f(-x) = f(x)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle d_{-1} T, \phi(x) \rangle = \langle T, \phi(x) \rangle \\ \implies d_{-1} T = T \end{array}}$$

Fonction impaire

Si f est impaire alors $f(-x) = -f(x)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \langle d_{-1} T, \phi(x) \rangle = -\langle T, \phi(x) \rangle \\ \implies d_{-1} T = -T \end{array}}$$

Produit par une fonction $\mathcal{C}^\infty$

NB : Ici φ n'est pas forcément à support compact

$$\boxed{\langle \psi T, \phi \rangle = \langle T, \psi \phi \rangle}$$

Valeur principale de Cauchy

$$\boxed{\mathrm{v.p.} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{\xi - \varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\xi + \varepsilon}^b f(t)\,\mathrm{d}t \right)}$$

Si la limite existe, on dit que l'intégrale est convergente au sens de la valeur principale de Cauchy.

Distribution de Dirac

Définition de δ

$$\boxed{\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)}$$

Définition de δ_a

δ_a est la distribution de Dirac centrée en a.

$$\boxed{\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)}$$

Notation

$$\boxed{\delta(x) \Leftrightarrow \delta}$$

$$\boxed{\delta(x-a) \Leftrightarrow \delta_a}$$

Dérivation de la distribution

$$\boxed{\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle}$$

Dérivée de la distribution de Dirac

$$\boxed{\langle \delta_a^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \langle \delta_a, \phi^{(n)} \rangle = (-1)^n \phi^{(n)}(a)}$$

Dérivée de la distribution de Heaviside

$$\boxed{\langle T'_H, \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) \quad \text{donc} \quad T'_H = \delta}$$

Dérivée discontinue du point de vue des distributions

Soit f une fonction discontinue en a et en b, σ_a et σ_b les "magnitudes des sauts" en a et b.

$$\boxed{\langle T'_f, \phi \rangle = \sigma_a \phi(a) + \sigma_b \phi(b) + \langle T_{f'}, \phi \rangle}$$

Formule générale :

$$\boxed{T'_f = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \delta_{a_i}}$$

Dérivée du produit

$$\boxed{(\psi.T)' = \psi.T' + \psi'.T}$$

Equation de distribution

Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\dfrac{1}{f}$ soit $\mathcal{C}^\infty$ aussi, T une distribution inconnue et S une distribution connue.

Solution particulière

$$\boxed{f.T = S \iff T_p = \frac{S}{f}}$$

Equation homogène

$$\boxed{f.T_0 = 0 \iff T_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0 \\ k\delta_a & \text{si } f(a) = 0 \end{cases}}$$